**16-1横向波** 2021年5月26日20点05分——2021年5月31日11点20分

**什么是物理？**

物理学的主要主题之一是波.要了解现代世界中波的重要性,只需考虑音乐产业.从校园潜水中播放的一些复古朋克乐队到网络上最雄辩的协奏曲,您听到的每一首音乐都取决于表演者产生的波并检测出这些波.在生产和检测之间,波传播的信息可能需要传输(如在网络上的现场表演)或记录然后再进行再现(如CD,DVD或全球工程实验室目前正在开发的其他设备).控制音乐波动的财务重要性是惊人的,开发新控制技术的工程师可以获得丰厚的回报.

本章重点介绍沿着拉长的弦线(例如,吉他)传播的波.下一章重点介绍声波,例如弹奏吉他弦所产生的声波.但是,在执行所有这些操作之前,我们的首要工作是将日常生活中无数的波归类为基本类型.

**波类型**

波主要分为三种类型:

1. **机械波**. 这些波是最熟悉的,因为我们几乎不断遇到它们.常见的例子包括水波,声波和地震波. 所有这些波都有两个主要特征:它们受牛顿定律的约束,并且只能存在于诸如水,空气和岩石之类的物质介质中.
2. **电磁波**. 这些波并不那么熟悉,但是您经常使用它们.常见的示例包括可见光和紫外线,无线电和电视波,微波,X射线和雷达波.这些波不需要物质介质存在.例如,来自恒星的光波穿过太空的真空到达我们.所有电磁波以相同的速度穿过真空.
3. **物质波**. 尽管这些波在现代技术中是常用的,但您可能对它们并不熟悉.这些波与电子,质子和其他基本粒子,甚至原子和分子有关.因为我们通常将这些粒子视为构成物质,所以将这些波称为物质波.

我们在本章中讨论的大部分内容都适用于各种波动.但是,对于特定示例,我们将参考机械波.

**横向波和纵向波**

沿着拉紧的绷紧弦线发出的波是最简单的机械波.如果您给一根拉长的琴弦的一端加一个上下颠簸,则以单个脉冲形式出现的波会沿着琴弦传播.由于弦线处于拉紧状态,因此可能会发生此脉冲及其运动.当您向上拉弦的一端时,通过两部分之间的拉力,它开始在弦的相邻部分上向上拉.随着相邻部分的向上移动,它开始将下一个部分向上拉,依此类推.同时,您已经拉低了弦线的末端.当每个部分依次向上移动时,它开始被已经在下降中的相邻部分向下拉回.最终结果是,弦的形状变形(如图16-1a所示为脉冲)以一定的速度沿弦移动.

如果以连续的简谐运动上下移动手,则连续波将以速度沿弦传播.因为您的手的运动是时间的正弦函数,所以该波在任何给定的瞬间都具有正弦曲线的形状,如图16-1b所示.即,波具有正弦曲线或余弦曲线的形状.

在这里,我们仅考虑“理想”的弦,弦中没有类似摩擦的力会导致波在沿弦行进时消失.另外,我们假设弦线是如此之长,以至于我们不需要考虑从远端反弹的波.研究图16-1中的波的一种方法是监视波形向右移动时的波形(波形的形状).或者,我们可以在弦波通过它的同时上下振动时,视选线中某个元素的运动.我们会发现,每个这样的振荡弦单元的位移都垂直于波的传播方向,如图16-1b所示.将该运动称为**横向**,并将该波称为**横向波**.

**纵向波**. 图16-2显示了活塞如何在充气的长管中产生声波.如果突然向右再向左移动活塞,则可以沿管道发送声音脉冲.活塞的向右运动将靠近它的空气元素向右移动,从而改变了那里的气压.然后,增加的气压沿管道向右推动空气元素.向左移动活塞会降低其旁边的气压.结果,首先是最靠近活塞的元素,然后是更远的元素向左移动.因此,空气的运动和气压的变化以脉冲的形式沿管道向右移动.

如果以简单的谐波运动推动和拉动活塞(如图16-2所示),则正弦波将沿着管道传播.由于空气元素的运动与波的传播方向平行,因此该运动被称为**纵向**,而该波被称为**纵向波**.在本章中,我们重点介绍横波,尤其是弦波.在第十七章中,我们专注于纵波,尤其是声波.

横向波和纵向波都被称为**行波**,因为它们都从一个点传播到另一点,例如16-1中从管柱的一端到图的另一端,在图16-2中从管道的另一端到另一端结束.请注意,波是从一端到另一端移动的,而不是波移动通过的材料(绳或空气).

**波长和频率**

为了完整地描述弦线上的波(以及任何元素沿其长度的运动),我们需要一个给出波形状的函数.这意味着我们需要以下形式的关系

其中是任意弦线元素的横向位移,它是时间的函数h和元素沿弦线的位置的函数.通常,可以描述类似图16-1b中的波形的正弦曲线形状,其中为正弦或余弦函数.两者的波形大致相同.在本章中,我们使用正弦函数.

**正弦函数**. 想象一个如图16-1b所示的正弦波在轴的正方向传播.当波扫过弦的后续元素(即非常短的部分)时,这些元素将平行于轴振荡.在时间,位于位置的元素的位移为

由于此方程是根据位置编写的，因此可以用来查找弦线中所有元素随时间变化的位移.因此,它可以告诉我们在任何给定时间的波形.

公式16-2中的量名称显示在图16-3中,然后进行定义.但是,在讨论它们之前,让我们检查一下图16-4,该图显示了沿轴正方向传播的正弦波的五个“快照”.波的运动由指向波高点的短箭头的向右移动指示.从快照到快照,短箭头随波形向右移动,但弦线仅平行于轴移动.为了看到这一点,让我们跟随红色染色的弦线元素在处的运动.在第一个快照(图16-4a)中,该元素的位移为.在下一个快照中,该元素的位移为.由于波谷(或极低点)正在通过,因此产生了极大的向下位移.然后,它通过向后移动.在第四个快照中,它处于其极端的向上位移,因为波的一个峰值(或极端的高点)正在通过它.在第五个快照中,它又在处完成了一个完整的振荡.

**振幅和相位**

波的振幅(例如图16-4中的)是元素通过波时从其平衡位置开始的最大位移的大小. (下标代表最大值.)由于是一个大小,所以即使向下测量而不是如图16-4a所示向上测量,也始终是一个正数.

波的相位是公式16-2中正弦的自变量.当波在特定位置扫过弦元素时,相位随时间线性变化.这意味着正弦也发生变化,在+1和-1之间振荡.它的极端正值(+1)对应于穿过元素的波的峰值;在那一刻,位置处的值为.它的极端负值（-1）对应于穿过元素的波谷;在那一刻,位置处的值为.因此,波的正弦函数和随时间变化的相位与弦线元素的振荡相对应,并且波的幅度决定了弦线元素的极限.

注意:评估相位时,在评估正弦函数之前四舍五入数字可能会大大增加计算量.

**波长和角波数**

波的**波长**是波形状(或波形)的重复之间的距离(平行于波的传播方向).在图16-4a中标记了一个典型的波长,它是时间时的波形快照.那时,公式16-2给出了波形的描述,

根据定义,位移在该波长的两端相同,即和.因此,根据公式16-3,

当正弦函数的角度(或自变量)增加时,正弦函数开始重复自身,因此在公式16-4中,我们必须使,或者

我们称为波的角波数;它的国际单位制是弧度每米.(请注意,这里的符号并不像以前那样代表弹簧常数.）

请注意,图16-4中的波从一个快照向右移动.因此,在第五张快照中,它已向右移动了.

**周期,角频率和频率**

图16-5显示了公式16-2的位移与时间在沿弦线的某个位置的关系图,取自.如果要监视弦线,您会发现其中的单个元素在x=0的情况下,该位置处的弦以公式16-2给出的简谐运动上下移动:

图16-5是该方程的曲线图,其位移随时间变化.它没有显示出波的形状.(图16-4显示了形状,是真实的照片;图16-5显示了图形,因此是一种抽象.)

我们将波的振荡周期T定义为任何弦线元素穿过一个弦波所花费的时间.在图16-5的图形上标记了一个典型的周期.将公式16-6应用于该时间间隔的两端,并使得结果相等

仅当时,等式才能成立,或者如果

我们称为波的角频率;其SI单位是弧度每秒.

回顾一下图16-4中行波的五个快照.快照之间的时间为.因此,在第五次快照中,每个弦线元素都进行了一次完整的振荡.

波的**频率**定义为,并且与角频率的关系为

像第15章中的简谐运动的频率一样,该频率是每单位时间的振荡次数-在这里,是弦元素随着波在其中移动所产生的次数.如第15章所述,通常用赫兹或其倍数(例如千赫兹)来测量.

**相常数**

当通过公式16-2的波函数给出正弦行波时,当t=0时,x=0附近的波如图16-6a所示.请注意,在x=0时,位移为y=0且斜率处于最大正值.我们可以通过在波动函数中插入**相位常数**来概括公式16-2:

可以选择适当的值,以便当时函数在时给出其他位移和斜率.例如,选择可以给出图16-6b所示的位移和斜率.当时.该波仍是正弦波,具有,和的相同值,但是现在它已从图16-6a中所示的位置偏移(其中).还要注意移位的方向.的正值使曲线沿轴的负方向移动;负值会使曲线向正方向移动.

**行波速度**

图16-7给出了公式16-2的两个快照,相隔一个小的时间间隔.波沿的正方向传播(在图16-7中向右),整个波型在间隔内沿该方向移动距离.比率(或在微分极限中为)为波速.如何找到其值？

当图16-7中的波移动时,移动波形的每个点(例如标记在峰上的点)都将保持其位移. (弦线上的点不保留其位移,但波形上的点保留.)如果点A在移动时保留其位移,则公式16-2中的相位将使其位移必须保持恒定:

请注意,尽管此参数是常数,但是和都在变化.实际上,随着t的增加,x也必须增加,以保持参数不变.这证实了波形在的正方向上移动.

为了找到波速,我们采用公式16-11的导数,得到

或

使用公式16-5()和公式16-8,我们可以将波速重写为

方程告诉我们,波速是波长每周期.该波在一个振荡周期内移动一个波长的距离.

公式16-2描述了沿的正方向移动的波.通过将公式16-2中的替换为,可以找到沿相反方向传播的波的方程.这对应于条件

其中(比较公式16-11)要求随时间减小.因此,通过等式描述了在的负方向上传播的波

如果像我们刚才对公式16-2的波动那样对公式16-15的波动进行分析,您会发现其速度

负号(比较公式16-12)验证了该波确实在的负方向上运动,并证明了切换时间变量的正负号的合理性.

现在考虑由

其中表示任何函数,正弦函数是一种可能.我们之前的分析表明,变量和进入组合的所有波都是行波.此外,所有行波都必须具有公式16-17的形式.因此,表示可能的(尽管在物理上可能有点奇怪)行波.另一方面,函数并不代表行波.

**16-2 拉伸弦上的波速** 2021年5月31日09点55分

波的速度通过公式 16-13 与波的波长和频率相关,但它是由介质的属性决定的.如果波要穿过介质,例如水,空气,钢或拉伸的弦,它必须使介质的粒子在它通过时发生振荡,这需要质量(对于动能)和弹性(对于势能).因此,质量和弹性决定了波的传播速度.在这里,我们通过两种方式找到了这种依赖性.

**量纲[Dimensional]分析**

在量纲分析中,我们仔细检查进入给定情况的所有物理量的量纲,以确定它们产生的量.在这种情况下,我们检查质量和弹性以找到速度,其量纲为长度除以时间,或.

对于质量,我们使用弦元素的质量,即弦的质量除以弦的长度.我们称这个比率为弦的线性密度.因此,,其量纲为质量除以长度,.

除非弦处于张力下,否则您无法沿着弦发送波,这意味着它已被拉伸并被两端的力拉紧.弦中的张力等于这两个力的共同大小.当波沿着弦传播时,它通过引起额外的拉伸来移动弦的元素,弦的相邻部分由于张力而相互拉动.因此,我们可以将弦的张力与弦的拉伸(弹性)联系起来.它产生的张力和拉伸力具有力的量纲,即(来自).

我们需要结合(量纲)和(量纲)来得到(量纲).各种组合的一点点技巧表明

其中是无法通过量纲分析确定的无量纲常数.在我们确定波速的第二种方法中,您将看到公式 16-22 确实是正确的,并且.

**牛顿第二定律的推导**

代替图 16-1b 的正弦波,让我们考虑一个单一的对称脉冲,如图 16-9 所示,以速度沿着一根弦从左向右移动.为了方便起见,我们选择一个参考系,其中脉搏保持静止;也就是说,我们与脉冲一起运行,并始终保持在视野中.在这个参考系中,弦似乎从我们身边经过,在图 16-9 中从右到左,速度为 .

考虑脉冲内长度为的弦元素,该元素形成半径为的圆弧并在该圆的中心对角.大小等于弦张力的力在该元素的每一端切向拉动.这些力的水平分量抵消,但垂直分量相加形成径向恢复力 .其大小为,

对于图 16-9 中的小角度,我们将近似为.从该图中,我们还使用了.元素的质量由下式给出

其中是弦的线性密度.

在图 16-9 所示的时刻,弦元素 沿圆弧运动.因此,它具有朝向该圆心的向心加速度,由下式给出

方程 16-23,16-24和16-25包含牛顿第二定律的元素.将它们组合成形式

给出

求解速度的该方程式

如果该等式中的常数被赋予值1,则与等式 16-22 完全一致.公式 16-26 给出了图 16-9中的脉冲速度以及相同张力下同一弦上的任何其他波的速度.

公式16-26告诉我们:

**波沿拉伸的理想弦的速度仅取决于弦的张力和线密度,而不取决于波的频率**.

波的频率完全由产生波的任何因素)例如,图16-1b中的人)固定.然后波的波长由公式16-13固定,形式为.

**16-3 沿弦传播的波的能量和功率** 2021年5月31日10点07分

当我们在拉伸的弦上设置波时,我们为弦的运动提供了能量.当波远离我们时,它以动能和弹性势能的形式传输能量.让我们依次考虑每种形式.

**动能**

质量为的弦元素,当波通过它时以简谐运动横向振荡,其动能与其横向速度相关.当元素冲过它的位置(图16-10中的元素b)时,它的横向速度——因此它的动能——是最大值.当单元处于其极限位置(与元素一样)时,其横向速度——因此其动能——为零.

**弹性势能**

要沿先前笔直的弦发送正弦波,波必须拉伸弦.当长度为的弦元素横向振荡时,如果弦元素要适合正弦波形,则其长度必须以周期性方式增加和减少.弹性势能与这些长度变化有关,就像弹簧一样.

当弦元在其位置(图16-10中的元素a)时,其长度具有其正常的未受扰动值,因此其弹性势能为零.然而,当元素冲过其位置时,它具有最大的拉伸,因此具有最大的弹性势能.

**能量传输**

因此,振荡弦元素在处具有最大动能和最大弹性势能.在图16-10的快照中,最大位移的弦区域没有能量,而位移为零的区域具有最大能量.当波沿着弦传播时,由于弦中的张力而产生的力不断地做功,将能量从有能量的区域转移到没有能量的区域.

如图 16-1b 所示,让我们在沿水平轴拉伸的弦上设置波,以便公式16-2适用.当我们摆动琴弦的一端时,我们不断地为琴弦的运动和拉伸提供能量——当琴弦部分垂直于轴摆动时,它们具有动能和弹性势能.当波移动到之前静止的部分时,能量被转移到那些新的部分.因此,我们说波沿着弦传输能量.

**能量传输率**

与质量为的弦元素相关的动能由下式给出

其中是振荡弦元素的横向速度.为了找到,我们在保持不变的情况下,根据时间对公式16-2进行微分:

使用这个关系并让,我们将公式 16-27 改写为

将公式 16-29 除以可得出动能通过弦元素的速率,从而得出波携带动能的速率.出现在公式16-29右侧的是波速,所以

动能传递的平均速率为

在这里,我们取了整数个波长的平均值,并使用了一个事实,即整数个周期内余弦函数的平方的平均值是.

弹性势能也随波一起携带,并且以公式16-31给出的相同平均速率.尽管我们不会检查证明,但您应该记住,在诸如钟摆或弹簧块系统之类的振荡系统中,平均动能和平均势能是相等的.

平均功率,即波传输两种能量的平均速率,然后是

或者,根据公式16-31,

该方程中的因子和取决于弦的材料和张力.因子和取决于产生波的过程.一般的结果是,波的平均功率与振幅的平方以及角频率的平方有关,这对所有类型的波都是如此.

**16-4 波方程** 2021年5月31日10点21分

当波通过拉伸弦上的任何元素时,元素会垂直于波的传播方向移动(我们正在处理横波).通过将牛顿第二定律应用于元素的运动,我们可以推导出一个一般的微分方程,称为波动方程,它控制任何类型的波的传播.

图 16-11a 显示了质量为和长度为的弦元素的快照,当波沿着线性密度为的弦行进时,该弦沿水平轴拉伸.让我们假设波幅很小,因此当波通过时,元件只能从轴略微倾斜.元素右端的力的大小等于弦中的张力,并略微向上.元素左端的力的大小也等于张力,但方向略微向下.由于元素的轻微弯曲,这两个力并不是简单地方向相反,因此它们相互抵消.相反,它们结合起来产生一个净力,使元素具有向上的加速度.牛顿针对分量写的第二定律()使我们

让我们分部分分析这个方程,首先是质量,然后是加速度分量,然后是单独的力分量和 ,最后是方程16-34左侧的合力.

**质量**. 元素的质量可以用弦的线密度和元素的长度写成.因为元素只能有轻微的倾斜,(图 16-11a),我们有近似

**加速**. 公式16-34中的加速度是位移对时间的二阶导数:

力. 图16-11b显示与弦元素右端的弦相切.因此,我们可以将力的分量与右端的弦斜率关联为

我们还可以将分量与大小()相关联

或

然而,因为我们假设元素只是稍微倾斜,因此我们可以将公式16-38重写为

将其代入公式16-37并求解得到

弦线元素左端的类似分析给了我们

**净力.** 我们现在可以将方程 16-35,16-36,16-40和16-41代入方程16-34来写成

或

由于弦元素很短,斜率和仅相差一个微分量,其中是任意点的斜率:

首先将公式16-42中的替换为,然后使用公式16-43将替换为,我们发现

最后得到

在最后一步,我们切换到偏导数的表示法,因为在左边我们只对 x 进行微分,而在右边我们只对 t 进行微分.最后,代入公式 16-26 (v = √τ /μ ),我们发现

这是控制所有类型波传播的一般微分方程.

**16-5 波的干涉** 2021年5月31日10点27分

**波的叠加原理**

经常发生两个或多个波同时通过同一区域的情况.例如,当我们听音乐会时,来自许多乐器的声波会同时落在我们的耳膜上.广播和电视接收机天线中的电子是通过来自许多广播电台的许多电磁波的净作用而运动的.湖泊或港口的水可能会在许多船只的尾流中被波搅动.假设两个波同时沿着同一根拉伸的弦传播.设和是每个波单独传播时弦将经历的位移.当波重叠时弦的位移就是代数和

这种沿弦位移的总和意味着

**重叠波以代数方式相加以产生合成波(或净波)**.

这是叠加原理的另一个例子,即当多个效应同时发生时,它们的净效应是单个效应的总和. (我们应该庆幸只需要一个简单的总和.如果两个效应以某种方式相互放大,由此产生的非线性世界将很难管理和理解.)图16-12显示了两个反向传播的脉冲的一系列快照同一拉伸弦线上的方向.当脉冲重叠时,产生的脉冲是它们的总和.而且,

**重叠的波不会以任何方式改变彼此的行进**.

**波的干涉**

假设我们沿着一条拉伸的弦在相同的方向上发送两个相同波长和振幅的正弦波.叠加原理适用.它预测弦的合成波是什么？

合成波取决于波彼此同相(同步)的程度——即一种波形与另一种波形的偏移量.如果这些波完全同相(以使一个波峰和波谷与另一个波峰和波谷精确对齐),则它们会结合在一起,使两个单独作用的波的位移加倍.如果它们完全异相(一个的波峰与另一个的波谷完全对齐),它们会在各处相互抵消,并且弦线保持笔直.我们称这种合波现象为**干涉[interference]**,称波干涉.(这些术语仅指波的位移;波的传播不受影响.)

让沿着拉伸的弦传播的波由下式给出

另一个,从第一个转移,由

这些波具有相同的角频率(因此具有相同的频率),相同的角波数(因此具有相同的波长)和相同的振幅.它们都以相同的速度沿轴的正方向行进,如公式16-26 所示.它们仅相差一个恒定角度,即相位常数.这些波被称为异相或具有的相位差,或者说一个波与另一个波相移了.

根据叠加原理(公式16-46),合成波是两个干涉波的代数和,具有位移

在附录E中,我们看到我们可以将两个角和的正弦之和写为

将此关系应用于公式16-49导致

如图 16-13 所示,合成波也是沿增加方向传播的正弦波.这是您在弦上实际看到的唯一波(您不会看到公式16-47和16-48中的两个干扰波).

**如果具有相同幅度和波长的两个正弦波沿着拉伸的弦以相同方向传播,则它们会干涉而产生沿该方向传播的合成正弦波**.

合成波在两个方面与干涉波不同：(1)其相位常数为,(2)其振幅是公式 16-51 中括号中数量的大小:

如果(或0°),则两个干涉波完全同相,公式16-51简化为

这两个波如图16-14a所示,合成波如图16-14d所示.请注意，从该图和公式16-53中可以看出, 合成波的幅度是任一干扰波幅度的两倍.这是合成波可以具有的最大幅度,因为方程16-51和16-52中的余弦项在时具有最大值(单位).产生最大可能幅度的干扰称为**完全相长干涉**.

如果(或180°),则干扰波完全异相,如图 16-14b 所示.然后变为,公式16-52给出的合成波的幅度为零.对于和的所有值,我们都有

合成波如图16-14e所示.尽管我们沿弦发送了两个波,但我们看不到弦的运动.这种类型的干扰称为完全破坏性干扰.

由于正弦波每弧度重复其形状,因此弧度(或360°)的相位差对应于一个波相对于另一个波的位移相当于一个波长的距离.因此,可以根据波长以及角度来描述相位差.例如,在图16-14b中,可以说波的相位差为0.50波长.表16-1显示了相位差及其产生的干扰的其他一些示例.请注意,当干涉既不是完全建设性的也不是完全破坏性的时,称为中间干涉.然后,合成波的振幅介于0和之间.例如,从表16-1中,如果干扰波的相位差为120°(波长),则合成波的振幅为,与干扰波的振幅相同(参见图 16-14c和f).

如果相位差为零或任意整数个波长,则具有相同波长的两个波是同相的.因此,可以丢弃以波长表示的任何相位差的整数部分.例如,0.40波长的相位差(中间干涉,接近完全相消干涉)在各方面都等效于2.40波长之一,因此可以在计算中使用两个数字中较简单的一个.因此,通过仅查看十进制数并将其与0,0.5或1.0波长进行比较,您可以快速判断两个波具有何种类型的干扰.

16-6相

在前面的模块中讨论的添加两个波严格限于具有相同幅度的波。 如果我们有这样的波，则该技术很容易使用，但是我们需要一种更通用的技术，可以应用于任何波，无论它们的振幅是否相同。 一种巧妙的方法是使用相量来表示波。 虽然这乍一看似乎很奇怪，但它本质上是一种图形技术，它使用了第 3 章的向量加法规则，而不是凌乱的三角加法。 相量是绕其尾部旋转的向量，该尾部在坐标系的原点处旋转。 矢量的幅度等于它所代表的波的幅度 ym。 旋转的角速度等于波的角频率ω。 例如，波

由图所示的相量表示。 16-15a 至 d。 相量的幅度是波的幅度 ym1。 当相量以角速度 ω 绕原点旋转时，其在垂直轴上的投影 y1 呈正弦变化，从 ym1 的最大值通过零到最小值 -ym1，然后返回到 ym1。 当波通过该点时，该变化对应于沿弦的任何点的位移 y1 的正弦变化。 （所有这些都在 WileyPLUS 中显示为带有画外音的动画。）当两个波沿同一弦以相同方向传播时，我们可以在相量图中表示它们及其合成波。 图 16-15e 中的相量表示方程 16-55 的波和由下式给出的第二波

该第二波与第一波相移了相位常数ϕ。 由于相量以相同的角速度 ω 旋转，因此两个相量之间的角度始终为 ϕ。 如果 ϕ 是一个正数，那么浪 2 的相量在它们旋转时滞后于浪 1 的相量，如图 16-15e 所示。 如果ϕ为负数，则波2的相量领先于波1的相量。由于波y1和y2具有相同的角波数k和角频率ω，因此从等式16-51和16-52可以知道 结果是形式

其中 y'm 是合成波的振幅，β 是其相位常数。 要找到 y'm 和 β 的值，我们必须对两个组合波求和，就像我们为获得公式 16-51 所做的那样。 为了在相量图上做到这一点，我们在两个相量旋转过程中的任何时刻进行矢量相加，如图 16-15f 所示，其中相量 ym2 已移至相量 ym1 的头部。 矢量和的幅度等于公式 16-57 中的幅度 y'm。 y1 的矢量和与相量之间的角度等于公式 16-57 中的相位常数 β。 请注意，与模块 16-5 的方法相反：

即使它们的振幅不同，我们也可以使用相量来组合波。

16-7 驻波和共振 2021年5月31日11点02分

驻波

在第 16-5 单元中，我们讨论了两个相同波长和振幅的正弦波沿拉伸弦向相同方向传播。 如果他们以相反的方向旅行怎么办？ 我们可以再次通过应用叠加原理找到合成波。 图 16-17 以图形方式显示了这种情况。 它显示了两个组合波，一个在图 16-17a 中向左传播，另一个在图 16-17b 中向右传播。 图 16-17c 显示了它们的总和，通过图形应用叠加原理获得。 合成波的突出特点是沿着弦有一些地方，称为节点，弦从不移动。 四个这样的节点在图 16-17c 中用点标记。 相邻节点之间的中间是波腹，其中合成波的幅度最大。 如图 16-17c 所示的波形称为驻波，因为波形不向左或向右移动； 最大值和最小值的位置不会改变。

如果两个振幅和波长相同的正弦波沿着一根拉长的弦向相反的方向传播，它们之间的干涉就会产生驻波。

为了分析驻波，我们用方程表示这两个波

叠加原理给出，对于组合波，

应用公式 16-50 的三角关系得出图 16-18 和

该方程不描述行波，因为它不是方程 16-17 的形式。 相反，它描述的是驻波。 公式 16-60 括号中的量 2ym sin kx 可以看作是位于位置 x 的弦元素的振荡幅度。 然而，由于幅度始终为正而sin kx 可以为负，因此我们将2ym sin kx 的绝对值作为x 处的幅度。 在行进正弦波中，所有弦元素的波幅都相同。 对于驻波，幅度随位置变化，这是不正确的。 例如，在公式 16-60 的驻波中，对于使 sin kx = 0 的 kx 值，幅度为零。这些值是

将这个方程中的 k = 2π/λ 代入并重新排列，我们得到

作为方程 16-60 的驻波的零振幅位置（节点）。 请注意，相邻节点之间的间隔为 λ/2，即半个波长。 公式 16-60 的驻波幅度的最大值为 2ym，这出现在 kx 值给出 | 罪 kx | = 1. 这些值是

代入式 16-63 中的 k = 2π/λ 并重新排列，我们得到

作为方程 16-60 的驻波的最大振幅位置（波腹）。 波腹由 λ/2 分隔，并且位于节点之间的中间。

边界处的反射

我们可以通过让行波从弦的远端反射来在拉伸的弦中设置驻波，以便波通过自身返回。入射（原始）波和反射波可以分别用公式 16-58 和 16-59 描述，它们可以组合形成驻波模式。在图 16-19 中，我们使用单个脉冲来显示这种反射是如何发生的。在图 16-19a 中，弦固定在其左端。当脉冲到达该端时，它会在支撑物（墙壁）上施加向上的力。根据牛顿第三定律，支撑对弦施加大小相等的相反力。这第二个力在支撑物上产生一个脉冲，该脉冲沿着与入射脉冲相反的方向沿着弦向回传播。在这种“硬”反射中，支撑处必须有一个节点，因为弦固定在那里。反射脉冲和入射脉冲必须具有相反的符号，以便在该点相互抵消。在图 16-19b 中，绳子的左端固定在一个光环上，该光环可以沿着杆自由滑动而不会产生摩擦。当入射脉冲到达时，环向上移动杆。当环移动时，它会拉动弦，拉伸弦并产生与入射脉冲具有相同符号和幅度的反射脉冲。因此，在这种“软”反射中，入射脉冲和反射脉冲相互增强，在弦的末端形成波腹；环的最大位移是这两个脉冲中任何一个的幅度的两倍。

驻波和共振

考虑在两个夹子之间拉伸的弦，例如吉他弦。假设我们沿着弦向右侧发送特定频率的连续正弦波。当波到达右端时，它会反射并开始向左传播。那个向左行的波然后与仍在向右行进的波重叠。当向左的波到达左端时，它再次反射，新反射的波开始向右行进，与向左和向右的波重叠。简而言之，我们很快就会有许多重叠的行波，它们相互干扰。对于某些频率，干扰会产生具有节点和大波腹的驻波模式（或振荡模式），如图 16-20 所示。这种驻波被称为在共振时产生，而琴弦在这些处产生共振某些频率，称为共振频率。如果琴弦以共振频率以外的某个频率振荡，则不会建立驻波。然后，向右行波和向左行波的干扰只会导致弦的微小的、暂时的（甚至可能察觉不到的）振荡。让一根弦在相距固定距离 L 的两个夹子之间拉伸。为了找到弦的共振频率的表达式，我们注意到它的每一端都必须存在一个节点，因为每一端都是固定的，不能振荡。满足这一关键要求的最简单的模式是图 16-21a 中的模式，它显示了弦在其两个极端位移（一个实线和一个虚线，一起形成一个“环”）。只有一个波腹位于弦的中心。请注意，半个波长跨越长度 L，我们将其视为弦线的长度。因此，对于这种模式，λ/2 = L。这个条件告诉我们，如果左行和右行的行波要通过它们的干涉建立这种模式，它们的波长必须为 λ = 2L。满足固定端节点要求的第二种简单模式如图 16-21b 所示。这种模式具有三个节点和两个波腹，被称为双环模式。要设置左行波和右行波，它们的波长必须为 λ = L。图 16-21c 显示了第三种模式。它具有四个节点，三个波腹和三个环，波长为λ= 2 3L。我们可以通过绘制越来越复杂的图案来继续这一进程。在级数的每一步中，该模式将比前一步多一个节点和一个波腹，并且将额外的 λ/2 拟合到距离 L 中。

因此，可以通过波长等于其中一个值的波在长度为 L 的弦上建立驻波

对应于这些波长的谐振频率遵循公式 16-13：

这里 v 是弦上的行波速度。

公式 16-66 告诉我们谐振频率是最低谐振频率的整数倍，f = v/2L，对应于 n = 1。具有最低频率的振荡模式称为基波模式或一次谐波。 二次谐波是n = 2时的振荡模式，三次谐波是n = 3时的振荡模式，依此类推。 与这些模式相关的频率通常标记为 f1、f2、f3 等。 所有可能的振荡模式的集合称为谐波级数，n称为第n次谐波的谐波数。 对于给定张力下的给定弦，每个共振频率对应于特定的振荡模式。 因此，如果频率在可听范围内，您就可以听到琴弦的形状。 共振也可以发生在二维（例如图 16-22 中的壶鼓表面）和三维（例如在风引起的高层建筑的摇摆和扭曲中）。